CHAPTER **4**

การวิเคราะห์เชิงมาร์คอฟ (Markov Analysis)

โจทย์ธุรกิจ

สถานการณ์ต้นบท: ความภักดีของลูกค้า (Customer Loyalty)

หลังจากผ่านสถานการณ์ความไม่แน่นอนของตลาดและการตัดสินใจเรื่องกลยุทธ์การผลิตแล้ว ฝ่ายการตลาดของบริษัท ABC Furniture สังเกตเห็นปรากฏการณ์สำคัญที่กำลังส่งผลต่อผลประกอบการของบริษัท นั่นคือเรื่องของ **"การรักษาฐานลูกค้าจากบริการหลังการขาย"**

คุณสมชายและฝ่ายการตลาดพบข้อมูลที่น่าสนใจว่า ในแต่ละไตรมาส ลูกค้าของบริษัทมีแนวโน้มที่จะเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมในการใช้บริการหลังการขายดังนี้:

- ◇ ลูกค้าบางส่วนเป็น **ลูกค้าประจำ (Loyal Customers)** ที่ใช้บริการต่อเนื่องทุกไตรมาส
- ◇ ลูกค้าบางส่วนเป็น **ลูกค้าเปลี่ยนใจง่าย (Occasional Customers)** ที่ใช้บริการบ้างไม่ใช้บริการบ้าง
- ◇ ลูกค้าบางส่วนเป็น **ลูกค้าที่หายไป (Lost Customers)** ซึ่งหยุดใช้บริการจากบริษัท

ฝ่ายการตลาดต้องการวิเคราะห์ว่า ในแต่ละไตรมาสนั้น ลูกค้าจะเปลี่ยนแปลงสถานะจากกลุ่มหนึ่งไปอีกกลุ่มหนึ่งอย่างไร เพื่อที่จะได้วางแผนกลยุทธ์การตลาดและการบริหารความสัมพันธ์กับลูกค้า (CRM) ให้เหมาะสม

อีเมลจากคุณสมชาย:

ข้อความ

"ในช่วงไตรมาสที่ผ่านมา เราเริ่มสังเกตเห็นว่าฐานลูกค้าของเราเปลี่ยนแปลงเร็วมาก มีลูกค้าประจำหลายรายที่กลายเป็นลูกค้าเปลี่ยนใจง่าย และลูกค้ากลุ่มเปลี่ยนใจง่ายจำนวนไม่น้อยที่หยุดใช้บริการเราไปเลย แต่ในทางกลับกัน ก็ยังมีลูกค้าใหม่ๆ ที่เปลี่ยนจากลูกค้าเปลี่ยนใจง่ายมาเป็นลูกค้าประจำได้ด้วย เราอยากวิเคราะห์ให้ลึกกว่านี้ว่าการเปลี่ยนสถานะของลูกค้าเกิดขึ้นในลักษณะไหน เพื่อช่วยให้เราออกแบบกลยุทธ์รักษาฐานลูกค้าได้ดีขึ้นครับ"

คำถามชวนคิดก่อนเรียน:

1. จากสถานการณ์ที่คุณสมชายเล่าให้ฟัง บริษัท ABC Furniture กำลังเจอกับปัญหาลักษณะใด?
2. คุณคิดว่าการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมของลูกค้าในแต่ละไตรมาสเป็นเรื่องที่วิเคราะห์ได้อย่างไร?
3. หากคุณจะสร้างแบบจำลองเพื่อวิเคราะห์พฤติกรรมลูกค้า คุณควรเก็บข้อมูลลักษณะใดบ้าง?

4. สถานการณ์เช่นนี้ เหตุใดบริษัทจึงควรสนใจเรื่อง “การรักษาฐานลูกค้า” มากกว่าการหาลูกค้าใหม่เพียงอย่างเดียว?
5. คุณคิดว่าการเปลี่ยนจากลูกค้าประจำไปเป็นลูกค้าเปลี่ยนใจง่าย หรือไปเป็นลูกค้าหายไป มีความสำคัญต่างกันหรือไม่ อย่างไร?

4.1 ลักษณะของปัญหาที่ใช้ตัวแบบมาร์คอฟแก้ปัญหา

- ตัวแบบมาร์คอฟจะพิจารณาถึงความไม่แน่นอนของการเปลี่ยนสถานะในอนาคตโดยอ้างอิงจากสถานะในปัจจุบัน
- เพราะฉะนั้นปัญหาที่จะใช้ตัวแบบมาร์คอฟต้องสามารถแจกจางสถานะ (state) ขาดออกจากกันได้ โดยแต่ละตัวอย่างจะต้องอยู่ในสถานะใดสถานะหนึ่งและเพียงสถานะเดียวเท่านั้น
- ต้องมีข้อมูลเกี่ยวกับการแจกแจงความน่าจะเป็นหรืออัตราส่วนของแต่ละสถานะในปัจจุบัน
- ต้องทราบข้อมูลเรื่องความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะ (transition probability)

ตัวอย่าง 4.1.1: Warm-up ความน่าจะเป็นสำหรับ Markov (ต้องใช้ความรู้เรื่อง conditional probability)

ในเหตุการณ์สมมติที่มีสถานะ 3 สถานะ สมมติเป็น s_1, s_2, s_3 โดยเราทราบความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะจากสถานะ s_1, s_2, s_3 มาเป็นสถานะ s_1 ในระยะเวลา 1 เดือนมีค่าเป็น $0.10, 0.90, 0.05$ ตามลำดับ โดยในปัจจุบันเราทราบว่ามีจำนวนคนที่มีสถานะเป็น s_1, s_2, s_3 อยู่เป็น $30, 75, 40$ คนตามลำดับ

- ทำไมความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะจากสถานะ s_1, s_2, s_3 มาเป็นสถานะ s_1 ถึงรวมกันได้ไม่เท่ากับ 1
- จงหาจำนวนคนในสถานะ s_1 ใน 1 เดือนข้างหน้า

4.2 คณิตศาสตร์สำหรับตัวแบบมาร์คอฟ

จากตัวอย่างที่ผ่านมานั้น เป็นตัวอย่างที่ได้ทำให้เห็นแนวคิดการคิดแบบความน่าจะเป็นว่าการวิเคราะห์การเปลี่ยนสถานะนั้น จริงๆ แล้วก็คือการหาความน่าจะเป็นของ 2 เหตุการณ์ต่อเนื่องกันในรูปแบบของความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข (Conditional Probability) และคุณสมบัติความน่าจะเป็นรวม (Total probability)

จำนวนคนในสถานะ s_1 ในเวลาถัดมา

$$
\begin{aligned}
&= \text{จำนวนคนทั้งหมด} \times P\,(\text{สุ่มหยิบได้คน } s_1 \text{ ในเวลาถัดมา}) \\
&= N \cdot P\left(X^{(2)} = s_1\right) \\
&= N \cdot \left(P\left(X^{(1)} = s_1 \wedge X^{(2)} = s_1\right) + P\left(X^{(1)} = s_2 \wedge X^{(2)} = s_1\right) + P\left(X^{(1)} = s_3 \wedge X^{(2)} = s_1\right)\right) \\
&= N \cdot \Big[P\left(X^{(1)} = s_1\right) P\left(X^{(2)} = s_1 | X^{(1)} = s_1\right) \\
&\qquad\quad + P\left(X^{(1)} = s_2\right) P\left(X^{(2)} = s_1 | X^{(1)} = s_2\right) \\
&\qquad\quad + P\left(X^{(1)} = s_3\right) P\left(X^{(2)} = s_1 | X^{(1)} = s_3\right)\Big] \\
&= N \cdot \Big[P\left(\text{สุ่มหยิบได้คน } s_1 \text{ ในเวลาเริ่ม}\right) P\left(\text{เปลี่ยนจาก } s_1 \text{ ไปเป็น } s_1\right) \\
&\qquad\quad + P\left(\text{สุ่มหยิบได้คน } s_2 \text{ ในเวลาเริ่ม}\right) P\left(\text{เปลี่ยนจาก } s_2 \text{ ไปเป็น } s_1\right) \\
&\qquad\quad + P\left(\text{สุ่มหยิบได้คน } s_3 \text{ ในเวลาเริ่ม}\right) P\left(\text{เปลี่ยนจาก } s_3 \text{ ไปเป็น } s_1\right)\Big] \\
&= \left(\text{จำนวนคน } s_1 \text{ ในเวลาเริ่ม}\right) P\left(\text{เปลี่ยนจาก } s_1 \text{ ไปเป็น } s_1\right) \\
&\qquad\quad + \left(\text{จำนวนคน } s_1 \text{ ในเวลาเริ่ม}\right) P\left(\text{เปลี่ยนจาก } s_2 \text{ ไปเป็น } s_1\right) \\
&\qquad\quad + \left(\text{จำนวนคน } s_1 \text{ ในเวลาเริ่ม}\right) P\left(\text{เปลี่ยนจาก } s_3 \text{ ไปเป็น } s_1\right)
\end{aligned}
$$

ในทำนองเดียวกัน เราจึงได้ว่า

$$\begin{aligned}\text{จำนวนคนในสถานะ } s_1 \text{ ในเวลาถัดมา} &= \left(\text{จำนวนคน } s_1 \text{ ในเวลาเริ่ม}\right) P\left(\text{เปลี่ยนจาก } s_1 \text{ ไปเป็น } s_1\right) \\ &+ \left(\text{จำนวนคน } s_2 \text{ ในเวลาเริ่ม}\right) P\left(\text{เปลี่ยนจาก } s_2 \text{ ไปเป็น } s_1\right) \\ &+ \left(\text{จำนวนคน } s_3 \text{ ในเวลาเริ่ม}\right) P\left(\text{เปลี่ยนจาก } s_3 \text{ ไปเป็น } s_1\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{จำนวนคนในสถานะ } s_2 \text{ ในเวลาถัดมา} &= \left(\text{จำนวนคน } s_1 \text{ ในเวลาเริ่ม}\right) P\left(\text{เปลี่ยนจาก } s_1 \text{ ไปเป็น } s_2\right) \\ &+ \left(\text{จำนวนคน } s_2 \text{ ในเวลาเริ่ม}\right) P\left(\text{เปลี่ยนจาก } s_2 \text{ ไปเป็น } s_2\right) \\ &+ \left(\text{จำนวนคน } s_3 \text{ ในเวลาเริ่ม}\right) P\left(\text{เปลี่ยนจาก } s_3 \text{ ไปเป็น } s_2\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{จำนวนคนในสถานะ } s_3 \text{ ในเวลาถัดมา} &= \left(\text{จำนวนคน } s_1 \text{ ในเวลาเริ่ม}\right) P\left(\text{เปลี่ยนจาก } s_1 \text{ ไปเป็น } s_3\right) \\ &+ \left(\text{จำนวนคน } s_2 \text{ ในเวลาเริ่ม}\right) P\left(\text{เปลี่ยนจาก } s_2 \text{ ไปเป็น } s_3\right) \\ &+ \left(\text{จำนวนคน } s_3 \text{ ในเวลาเริ่ม}\right) P\left(\text{เปลี่ยนจาก } s_3 \text{ ไปเป็น } s_3\right)\end{aligned}$$

เพื่อความสะดวกในการเขียนเป็นสัญลักษณ์เมทริกซ์ในส่วนถัดไป ขอกำหนดสัญลักษณ์ดังนี้

$$\begin{aligned}N_i &= \text{จำนวนคนในสถานะ } s_i \text{ ในเวลาเริ่ม} \\ N_i' &= \text{จำนวนคนในสถานะ } s_i \text{ ในเวลาถัดมา} \\ P_{ij} &= \text{ความน่าจะเป็นในการเปลี่ยนสถานะจาก } s_j \text{ มาเป็น } s_i\end{aligned}$$

ดังนั้น เราจึงได้ว่า

$$\begin{aligned}N_1' &= N_1P_{11} + N_2P_{12} + N_3P_{13} \\ N_2' &= N_1P_{21} + N_2P_{22} + N_3P_{23} \\ N_3' &= N_1P_{31} + N_2P_{32} + N_3P_{33}\end{aligned}$$

และเมื่อนำมาลองเขียนในรูปแบบเวกเตอร์แจกแจงจำนวนคน จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\vec{N}' &= \begin{pmatrix} N_1' \\ N_2' \\ N_3' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} N_1P_{11} + N_2P_{12} + N_3P_{13} \\ N_1P_{21} + N_2P_{22} + N_3P_{23} \\ N_1P_{31} + N_2P_{32} + N_3P_{33} \end{pmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} \\
\vec{N}' &= \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} \vec{N}
\end{aligned}$$

นิยาม 4.2.1: Transition Matrix

เมทริกซ์การเปลี่ยนสถานะ (transition matrix) คือเมทริกซ์ที่ลำดับของแถวและหลักของเมทริกซ์สอดคล้องกับลำดับสถานะ $s_1, \ldots, s_n$ โดยที่สมาชิกในตำแหน่งที่ ij คือค่าความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนจากสถานะ j มาเป็นสถานะ i

คุณสมบัติ 4.1: การหาจำนวนคนในแต่ละสถานะในช่วงเวลาถัดไป

กำหนดให้ N_t แทนเวกเตอร์ของจำนวนคนในแต่ละสถานะ โดยที่ลำดับของสถานะเป็น $s_1, \ldots, s_n$ และให้ P คือเมทริกซ์เปลี่ยนสถานะที่มีลำดับของสถานะเดียวกันกับลำดับสถานะของเวกเตอร์ N_t จะได้ว่า

$$N_{t+1} = PN_t$$

เพราะฉะนั้น จะได้โดยง่ายว่า

$$N_{t+k} = P^k N_t$$

ทั้งนี้ เราอาจจะเปลี่ยนไปใช้เวกเตอร์ที่แสดงความน่าจะเป็นแทนเวกเตอร์จำนวนคนจริง ๆ ก็ได้

ตัวอย่าง 4.2.1: การคำนวณมาร์คอฟของโรงอาหาร

โรงอาหารในบริษัทแห่งหนึ่งมีเมนูประจำร้าน 3 เมนู สมมติชื่อชุด A, B และ C โดยแต่ละเมนูมีการเตรียมวัตถุดิบที่แตกต่างกันออกไป ทางร้านจึงต้องการวางแผนอัตราส่วนของปริมาณของวัตถุดิบของอาหารแต่ละประเภทที่ต้องเก็บเข้าคลังไว้เป็นรายเดือน ดังนั้น ทางร้านจึงได้ทำการสำรวจพฤติกรรมการเปลี่ยนแปลงประเภทอาหารที่จะทานของพนักงานในบริษัทแห่งนั้น และได้ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงประเภทอาหารที่อยากทานใน 1 เดือนดังตารางด้านล่างนี้ (ให้สมมติว่าบริษัทไม่ได้มีการสมัครเข้าหรือลาออกบ่อย และในบริษัทมีร้านอาหารผูกขาดอยู่ร้านเดียว)

		เมนูที่ทานเดือนนี้		
		A	B	C
เมนูที่ทานเดือนถัดไป	A	0.6	0.6	0.2
	B	0.3	0.1	0.2
	C	0.1	0.3	0.6

สมมติว่าในเดือนนี้มีปริมาณการทานอาหารเมนู A, B, C เป็นจำนวน 60 ครั้ง, 100 ครั้ง, 40 ครั้ง ตามลำดับ

1. จงหาว่าในเดือนถัดไปจะมีการทานอาหารในแต่ละเมนูกี่ครั้ง
2. จงหาว่าในอีก 2 เดือนถัดไปจะมีการทานอาหารในแต่ละเมนูกี่ครั้ง

4.3 การวิเคราะห์สถานะคงที่

นิยาม 4.3.1: สถานะคงที่ (Steady State)

สถานะคงที่ของกระบวนการมาร์คอฟคือเวกเตอร์สถานะที่เมื่อผ่านขั้นตอนถัดไปแล้วมีสถานะคงเดิม (อัตราส่วนเท่าเดิม) กล่าวคือเวกเตอร์ $\vec{s}$ จะเป็นสถานะคงที่ของเมทริกซ์การเปลี่ยนสถานะ P ก็ต่อเมื่อ

$$P\vec{s} = \vec{s}$$

[a]ทั้งนี้เวกเตอร์ที่เป็นสเกลของเวกเตอร์สถานะคลที่ก็ยังคงเป็นสถานะคงที่เช่นกัน ดังนั้นในบางครั้งเราอาจจะระบุเพียงแค่เวกเตอร์ความน่าจะเป็น ณ สถานะคงที่ ซึ่งคือทุกสมาชิกในเวกเตอร์รวมกันได้ 1

[a]ในคณิตศาสตร์จะเรียกว่า $\vec{s}$ เป็น eigenvector ที่สอดคล้องกับ eigenvalue = 1 ของเมทริกซ์ P

ตัวอย่าง 4.3.1: เวกเตอร์สถานะคงที่

จงหาเวกเตอร์ความน่าจะเป็น ณ สถานะคงที่ของเมทริกซ์การเปลี่ยนสถานะของผู้รับบริการ $\begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}$ และถ้าสมมติว่า ณ เวลานั้นมีผู้รับบริการทั้งหมดอยู่ 500 คน จะมีคนอยู่ในแต่ละสถานะกี่คน

ตัวอย่าง 4.3.2: มาร์คอฟของโรงอาหาร (ต่อ)

จากตัวอย่างสถานะการโรงอาหารในบริษัทในตัวอย่าง 4.2.1 จงหาว่าต้องมีอัตราส่วนของคนชอบเมนูอาหารใดเท่าไหร่บ้างถึงจะอยู่ในสภาวะที่ไม่ต้องเปลี่ยนแปลงปริมาณการเก็บวัตถุดิบในเดือนถัดไป